Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de R

Ilustración basada en la obra Astro Retro i, de la Artista Plástica Lisa Kowalsky

Inecuaciones

3º AÑO

Cod. 1305/14

Matemática

Patricia Godino
Mirta Rosito

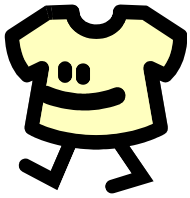
Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

I) Introducción

Un problema de administración

Una fábrica confecciona camisetas a un costo de \$12 de mano de obra y de \$3 de material, por unidad. Los gastos mensuales generales para la planta son \$6000. Si cada camiseta se vende a \$30, ¿cuántas camisetas deben venderse por mes para obtener ganancia?



Solución:

Es evidente que para que exista ganancia el monto de venta de las camisetas debe ser mayor que el costo de fabricación de las mismas.

Si x = cantidad mensual de camisetas fabricadas, resulta:

monto de venta = \$30 . x y costo mensual de fabricación = \$6000 + \$(12+3) . x

luego, habrá ganancia si: $\mathbf{30.x > 6000 + 15.x}$

> Observación:
>
> La desigualdad obtenida es una inecuación de primer grado en una incógnita.
> ¿Cómo resolverla?

II) Inecuaciones lineales o de primer grado en una incógnita

Definición:

> Se llama inecuación lineal o de primer grado en una incógnita en la variable x a toda expresión que puede presentarse de alguna de las siguientes formas:
>
> $a\,x+b > 0$, $a\,x+b \geq 0$, $a\,x+b < 0$ ó $a\,x+b \leq 0$ con $a, b \in \Re$, $a \neq 0$ y $\mathbf{x}$ variable

Resolver una inecuación de primer grado supone determinar los valores de la variable que satisfacen la desigualdad. Para ello demostraremos las propiedades de las relaciones de orden ya enunciadas en el curso anterior.

Propiedades de las relaciones de orden definidas en el conjunto de los números reales.

R1) $\boxed{\forall\ a, b, c \in \Re\ ; \quad a < b \Leftrightarrow a+c < b+c}$

Demostración:

$\Rightarrow$) Si $a < b \Rightarrow \exists\ x \in \Re^+ / a + x = b \underset{(1)}{\Rightarrow} (a+x)+c = b + c \underset{(2)}{\Rightarrow} (a + c) \underbrace{+ x}_{\in\Re^+} = b + c \Rightarrow$

$\Rightarrow a + c < b + c$

$\Leftarrow$) Si $a + c < b + c \Rightarrow \exists\ x \in \Re^+ / (a + c) + x = b + c \underset{(2)}{\Rightarrow} (a + x) + c = b + c \underset{(1)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow a \underbrace{+ x}_{\in\Re^+} = b \Rightarrow a < b$

(1) Prop. de la suma en las igualdades.
(2) prop. asociativa, conmutativa de la suma

R2) $\boxed{\forall\ a, b, c, d \in \Re \quad \text{con} \quad \left.\begin{matrix} a < b \\ c < d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a+c < b+d}$

Demostración:
Completa la demostración.

	Si	$a < b$	$\Rightarrow$	$\exists\ x \in \Re^+$ /	$a + x = b$
y	si	$c < d$	$\Rightarrow$	$\exists\ y \in \Re^+$ /	$c + \ldots = \ldots$

sumando miembro a miembro resulta $(\ldots + \ldots) + (\ldots + \ldots) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

aplicando propiedad asociativa y conmutativa de la suma $(\ldots + \ldots) + \underbrace{(x + y)}_{\in\Re^+} = \ldots\ldots\ldots\ldots$, pues x e y $\in \Re^+$

Luego, $a + c \ \ldots\ldots\ \ b + d$

R3) $\boxed{\forall\ a, b, c, \in \Re \quad \text{con} \quad \left.\begin{matrix} a < b \\ c > o \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \,.\, c < b \,.\, c}$

Demostración:

Si $a < b \Rightarrow \exists\ x \in \Re^+ / a + x = b \underset{(1)}{\Rightarrow} (a + x) . c = b . c \underset{(2)}{\Rightarrow} a . c + \underbrace{x . c}_{\in \Re^+ \text{, pues } x \text{ y } c \in \Re^+} = b . c \Rightarrow$

$\Rightarrow a . c < b . c$

(1) propiedad de la multiplicación en las igualdades.
(2) prop. distributiva de la multiplicación respecto de la suma

R4) $\boxed{\forall\ a, b, c, \in \Re \text{ con } \left.\begin{matrix} a < b \\ c < o \end{matrix}\right\} \Rightarrow a . c > b . c}$

Demostración:

Completa la demostración.

Si $a < b \Rightarrow \exists\ x \in \Re^+ / a + x = b \underset{(1)}{\Rightarrow} (a + x) . c = b . \ldots \underset{(2)}{\Rightarrow} a . \ldots + \underbrace{\ldots . \ldots}_{\in \Re^- \text{, pues } x \in \ldots \text{ y } c \in \ldots} = b . c \Rightarrow$

$\Rightarrow a . c \ldots\ldots\ldots b . c$

(1) propiedad de la multiplicación en las igualdades
(2) prop. distributiva de la multiplicación respecto de la suma

Ejercicio propuesto

Expresa en forma coloquial cada una de las propiedades anteriores.

R1) ………

………

R2) ………

………

R3) ………

………

R4) ………

………

Ejercicios resueltos:

Resuelve las siguientes inecuaciones, indica el conjunto solución y represéntalo en el eje real.

1) $5x + \left(-\frac{3}{5}\right) > 2$

Solución

$5x + (-\frac{3}{5}) > 2 \Rightarrow 5x + (-\frac{3}{5}) + \mathbf{\frac{3}{5}} > 2 + \mathbf{\frac{3}{5}} \Rightarrow 5x > \frac{13}{5} \Rightarrow \mathbf{\frac{1}{5}} \cdot 5x > \mathbf{\frac{1}{5}} \cdot \frac{13}{5}$

$\Rightarrow$

Sumando a ambos miembros $\frac{3}{5}$

Prop. de la suma en $\Re$ Y def. de suma

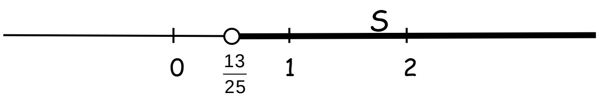
Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{5}$

$\Rightarrow x > \frac{13}{25}$

Prop. de la multiplicación en $\Re$ Y def. de multiplicación.

Recuerda, como $\frac{1}{5} > 0$, la desigualdad no cambia de sentido.

Luego, el conjunto solución es $S = \{x \,/\, x > \frac{13}{25}\}$, siendo su representación en el eje real:



Observación
Utilizamos ○ cuando el punto no pertenece al conjunto solución y ● cuando si pertenece.

2) $2x - 7 \leq 4x - 2$

Solución

$2x - 7 \leq 4x - 2 \Rightarrow 2x - 7 \mathbf{+7} \leq 4x - 2 \mathbf{+7} \Rightarrow 2x \leq 4x + 5 \Rightarrow 2x \mathbf{+ (-4x)} \leq 4x + 5 \mathbf{+ (-4x)} \Rightarrow$

Sumando a ambos miembros 7

Prop. de la suma en $\Re$ Y def. de suma

Sumando a ambos miembros (-4x)

$\Rightarrow -2x \leq 5 \Rightarrow \mathbf{(-\frac{1}{2})}(-2x) \geq \mathbf{(-\frac{1}{2})}.5 \Rightarrow x \geq (-\frac{5}{2})$

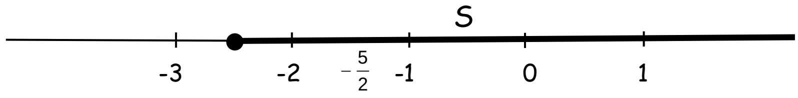
Prop. de la suma en $\Re$ Y def. de suma

Multiplicando ambos miembros por $(-\frac{1}{2})$

Prop. de la multiplicación en $\Re$ Y def. de multiplicación.

Recuerda, como $(-\frac{1}{2}) < 0$, la desigualdad cambia de sentido.

Luego, el conjunto solución es S = {x / x $\geq (-\frac{5}{2})$ }, siendo su representación en el eje real:

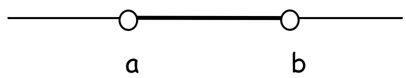
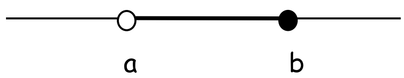


III) Intervalos

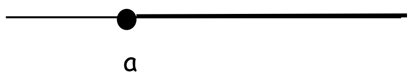
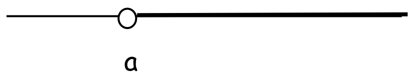
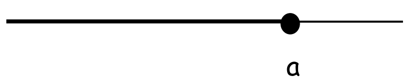
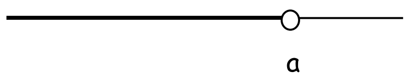
Los intervalos son subconjuntos de números reales. Algunas de sus representaciones gráficas son las que se presentan a continuación

Tipos de intervalos

Acotados

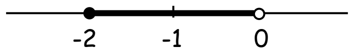
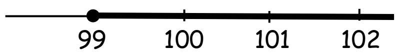
Nombre	Notación	Conjunto	Representación gráfica
Intervalo cerrado	[a ; b]	{x/ a ≤ x ≤ b}	
Intervalo abierto	(a ; b)	{x/ a < x < b}	
Intervalos semiabiertos ó semicerrados	[a ; b)	{x/ a ≤ x < b}	
	(a ; b]	{x/ a < x ≤ b}	

No acotados

Nombre	Notación	Conjunto	Representación gráfica
Superiormente	[a ; +∞)	{x / x ≥ a }	
	(a ; +∞)	{x / x > a }	
Inferiormente	(-∞ ; a]	{x /x ≤ a }	
	(-∞ ; a)	{x / x < a }	

Ejercicios propuestos

1) Completa el siguiente tabla:

Notación de intervalos	Notación de conjuntos	Representación gráfica
		
$(-\infty ; -4\ ]$		
	$\{x\ /\ 3 \leq x \leq \frac{11}{2}\}$	
		
$(-1 ; 7\ )$		
	$\{x\ /\ x < 10\}$	
$(\sqrt{2}\ ; 8\ \ ]$		
	$\{x\ /\ \frac{1}{3} \leq x < 4\}$	

2) Resuelve las siguientes inecuaciones, indica el conjunto solución utilizando la notación de intervalos, y represéntalo en el eje real.

a) $x - 5 \geq 7$

b) $4x + 1 < 2x$

c) $\frac{1}{2}x + 3 > -\frac{1}{2}x + 4$

d) $6 + 4 . (-2y) < \frac{1}{2}y - 5$

e) $x^2+5 \geq 0$

f) $\frac{2}{x-5} > 0$

g) $\frac{z-5}{3} - z \geq -3(z - 1)$

h) $\frac{6\,(x-2)}{5} > \frac{10\,(2-x)}{3}$

i) $\frac{x^2+1}{x-2} \geq 0$

j) $-3x +1 < 3\ [(x+2) -2x\ ] -1$

k) $\frac{5y-1}{-3} < \frac{7(y+1)}{-2}$

l) $0x \leq 0$

m) $(x+2)^2-10 < (x-1)^2 + 3$

n) $(x-7).(x+1) + 2 \geq x . (x-7) - 5$

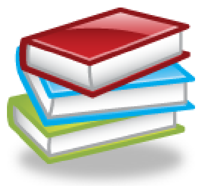
Nota : Observa que algunas de las inecuaciones no son de primer grado .

3) Dados $a < b$, ¿cuáles de las siguiente afirmaciones son correctas?

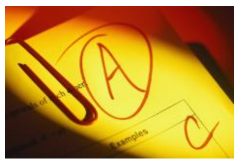
i) $a + 2 < b + 2$ ii) $5b < 5a$ iii) $5 - a > 5 - b$ iv) $(a - b)(b - a) > 0$

4) Resuelve el problema inicial.

5) Linda Collins piensa escribir y publicar su autobiografía. El costo de publicar **x** libros es de $C = \$(2100 + 25x)$ y estima vender cada ejemplar en \$60. ¿Cuántos debería vender para obtener ganancia?



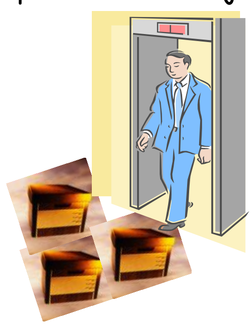
6) Para recibir una calificación **A** en un curso, Rafael debe obtener un promedio de 90 ó más en 5 exámenes. Si las primeras cuatro calificaciones de Rafael son 92, 87, 96 y 77, ¿cuál es la calificación mínima que debe obtener Rafael en el quinto examen para logar una A en el curso?



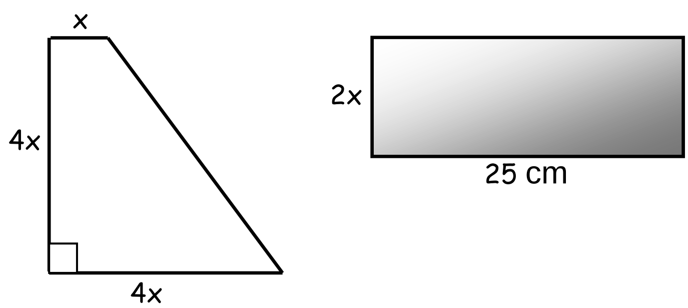
7) El letrero del ascensor de un edificio dice: "Peso máximo 450 kilos". Pedro, el conserje del edificio, quien pesa 98 kilos, debe subir cajas del primer al quinto piso. Si cada caja pesa 35 kilos,

a) ¿Cuál es el número máximo de cajas que Pedro puede colocar en el ascensor si él decide subir por la escalera?

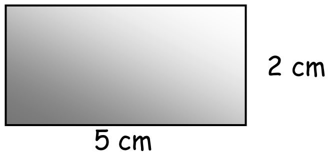
b) ¿Cuántas podrá llevar en cada viaje si Pedro decide subir también en el ascensor?



8) ¿Cuál debe ser la longitud de la base mayor del trapecio de la figura para que su perímetro no supere al del rectángulo?



9) El perímetro de un cuadrado de lado **x** , no supera al perímetro del rectángulo de la figura.



¿Qué puedes asegurar de la superficie ***S*** del cuadrado. Exprésalo mediante una inecuación.

10) Dados los conjuntos:

$A = (-2\ ;\ \pi)$ $B = \Re^{-}$ $C = (-1\ ;\ 3]$ y $D = \{x \,/\, x \geq -1\}$

representa en el eje real los conjuntos,

a) $A \cup B$ b) $B \cap C$ c) $A \cap B \cap C$ d) $B \cap D$

- $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

IV) Sistemas de inecuaciones

Dos o más inecuaciones consideradas en forma simultánea generan un sistema de inecuaciones. Resolverlo es encontrar el conjunto de números reales que satisfacen todas las inecuaciones del sistema a la vez.

Ejemplos resueltos:

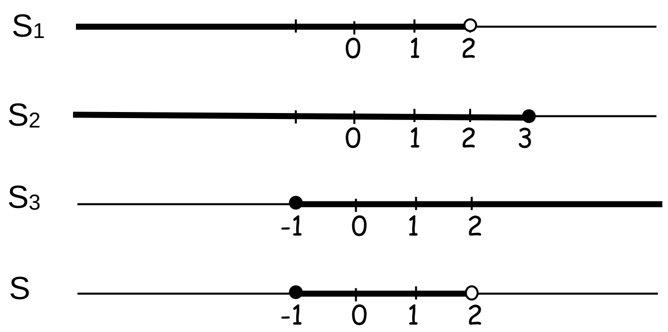
1) Encuentra analítica y gráficamente el conjunto solución del siguiente sistema de inecuaciones de primer grado en una variable.

$$\begin{cases} 3x - 6 < 0 \\ 1 - x \geq -2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} 3x - 6 < 0 \\ 1 - x \geq -2 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x < 6 \\ -x \geq -2 -1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ -x \geq -3 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 & \longrightarrow S_1 = (-\infty; 2) \\ x \leq 3 & \longrightarrow S_2 = (-\infty; 3] \\ x \geq -1 & \longrightarrow S_3 = [-1; +\infty) \end{cases}$$

Una vez resuelta cada inecuación en forma independiente se debe encontrar un conjunto solución, el cual será $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3$ ya que se deben cumplir las tres inecuaciones en forma simultánea. Para ello recurriremos a la representación gráfica de cada conjunto y poder encontrar más fácilmente la intersección.



Luego,

$$\boxed{S = [-1 ; 2)}$$

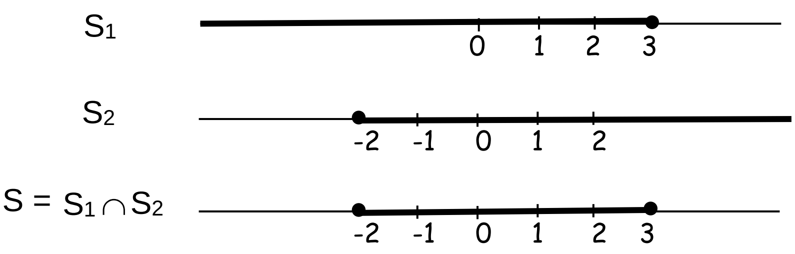
2) Resuelve:

$-17 \leq -5x - 2 \leq 8$

<u>Solución:</u>

Observa que el problema planteado constituye un sistema de inecuaciones ya que deben cumplirse simultáneamente que $-5x - 2 \geq -17 \wedge -5x - 2 \leq 8$. Luego podemos plantear:

$$\begin{cases} -5x - 2 \geq -17 \\ -5x - 2 \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x \geq -15 \\ -5x \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \longrightarrow S_1 = (-\infty ; 3] \\ x \geq -2 \longrightarrow S_2 = [-2 ; +\infty) \end{cases}$$



Luego,

$$\boxed{S = [-2 ; 3]}$$

Observación:

Este último ejercicio puede resolverse simultáneamente de la siguiente manera:

$$-17 \le -5x - 2 \le 8$$

Sumando en cada miembro 2 $\quad -17 + \mathbf{2} \le -5x - 2 + \mathbf{2} \le 8 + \mathbf{2}$

Operando $\quad -15 \le -5x \le 10$

Multiplicando por $(-\frac{1}{5})$ $\quad (-\frac{1}{5})(-15) \ge (-\frac{1}{5})(-5x) \ge (-\frac{1}{5})10$

Operando y aplicando prop. $\quad 3 \ge x \ge -2 \quad$ ó $\quad -2 \le x \le 3 \Rightarrow S = [-2 ; 3]$

Ejercicios propuestos

11) Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones. Indica el conjunto solución y represéntalo en el eje real.

a) $12 < 3z - 1 < 42$

b) $4y + 2 \le -y + 3 < \frac{1}{2}y$

c) $-1 < -\frac{x}{3} < 1$

d) $\begin{cases} 3x + 7 < 1 \\ 2x + 1 > -4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x + 7 < 1 \\ 2x + 1 < 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} (1-x)(1+x) + (x-1)^2 < 2 \\ -3 \le x < 1 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 4x \ge 1 \\ 2x < 2 \\ \frac{x+3}{2} \ge \frac{1}{4}x + 2 \end{cases}$

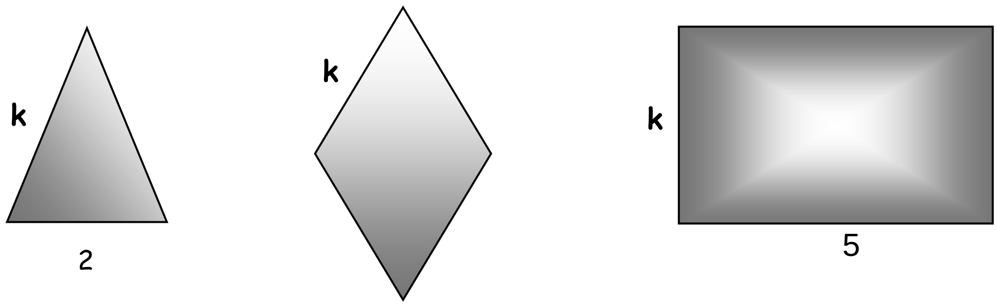
h) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} > 2 \\ 2x - 4 < x - 1 \le 3 \end{cases}$

12) Recuerda que cada lado de un triángulo es menor que la suma de l os otros dos y mayor que su diferencia. Si uno de sus lados mide 1 cm. y otro 12 cm. ¿Qué podrías decir de la longitud del tercer lado?

13) Me bastan $35 para comprar 6 revistas técnicas, pero no me alcanza con $70 para comprar 13 . ¿Cuánto puede costar cada revista técnica?

14) La suma de tres enteros consecutivos es menor que 1918 y mayor que 1914. ¿Cuáles son dichos números?

15) Se designa con **k** a los lados congruentes de un triángulo isósceles cuyo tercer lado mide 2cm.,al lado de un rombo y a la altura de un rectángulo de base 5cm. Determina "**k**" de modo que el perímetro del rombo sea superior al del triángulo e inferior al del rectángulo.



V) La multiplicación y la división en las inecuaciones

Abordaremos ahora inecuaciones donde aparecen multiplicaciones o divisiones, las cuales nos conducirán a un doble planteo. Recordemos previamente:

1) Multiplicaciones

1) $A \cdot B > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A < 0 \\ B < 0 \end{cases}\right]$

2) $A \cdot B \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A \leq 0 \\ B \leq 0 \end{cases}\right]$

3) $A \cdot B < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A < 0 \\ B > 0 \end{cases}\right]$

4) $A \cdot B \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} A \geq 0 \\ B \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A \leq 0 \\ B \geq 0 \end{cases}\right]$

2) Divisiones

1) $\dfrac{A}{B} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A < 0 \\ B < 0 \end{cases}\right]$

2) $\dfrac{A}{B} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A \leq 0 \\ B < 0 \end{cases}\right]$

3) $\dfrac{A}{B} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} A > 0 \\ B < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A < 0 \\ B > 0 \end{cases}\right]$

4) $\dfrac{A}{B} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A \leq 0 \\ B > 0 \end{cases}\right]$

<u>Ejemplos resueltos</u>

Resuelve las siguientes inecuaciones.

1) $(x+2).(x-1) > 0$

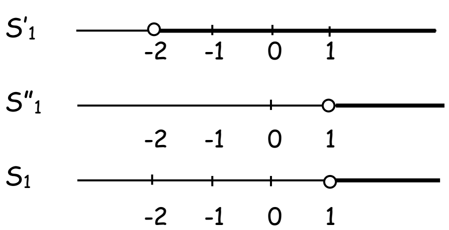
<u>Solución</u>

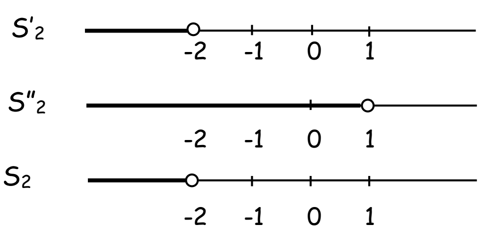
1) $(x+2).(x-1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x+2>0 \\ x-1>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+2<0 \\ x-1<0 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\underbrace{\begin{cases} x>-2 & \to S_1' \\ x>1 & \to S_1'' \end{cases}}_{S_1 = S'_1 \cap S''_1} \vee \underbrace{\begin{cases} x<-2 & \to S_2' \\ x<1 & \to S_2'' \end{cases}}_{S_2 = S'_2 \cap S''_2} \right]$

$$\Downarrow$$

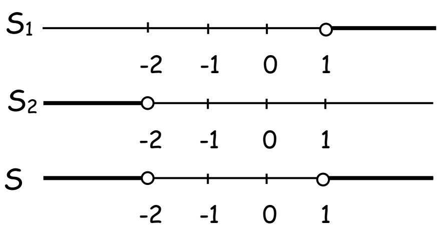
$$\boxed{S = S_1 \cup S_2}$$

$\underline{\underline{S_1}}$ $\underline{\underline{S_2}}$





Luego: $\underline{\underline{S}}$



$$\Downarrow$$

$$\boxed{S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)}$$

2) $\dfrac{2x-1}{3-x} \le 0$

<u>Solución</u>

Completa el esquema:

$$\frac{2x-1}{3-x} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases} \vee \begin{cases}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}\right] \Leftrightarrow \left[\underbrace{\begin{cases}\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow S_1' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow S_1''\end{cases}}_{S_1 = S'_1 \ldots\ldots S''_1} \vee \underbrace{\begin{cases}\ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow S_2' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \rightarrow S_2''\end{cases}}_{S_2 = S'_2 \ldots\ldots S''_2}\right]$$

$$\boxed{S = S_1 \ldots\ldots S_2}$$

S_1

S'_1 -1 0 1 2 3 4

S''_1 -1 0 1 2 3 4

S_1 -1 0 1 2 3 4

S_2

S'_2 -1 0 1 2 3 4

S''_2 -1 0 1 2 3 4

S_2 -1 0 1 2 3 4

Luego: S

S_1 -1 0 1 2 3 4

S_2 -1 0 1 2 3 4

S -1 0 1 2 3 4 $\Rightarrow$ S = ……………………………………………………

3) $\dfrac{-x+2}{1+x} \ge 5$

Solución

En este apartado debes primero llevar la inecuación a compararla con 0. Completa el esquema.

$$\frac{-x+2}{1+x} \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x+2}{1+x} - 5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x+2}{1+x} - \frac{5.(\ldots\ldots)}{\ldots\ldots\ldots} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x+2-5(1+x)}{1+x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-x+2-\ldots\ldots\ldots}{1+x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ldots\ldots\ldots}{1+x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left[\underset{S_1}{\begin{cases}\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\end{cases}} \quad \vee \quad \underset{S_2}{\begin{cases}\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\end{cases}}\right]}_{S \,=\, S_1 \,\ldots\ldots\, S_2}$$

Continúa con la resolución.

Ejercicios propuestos

16) a) $x\,.\,(2x-6) < 0$ b) $(-x+1).(3x+2) \leq 0$ c) $(x+4).(-x) \geq 0$

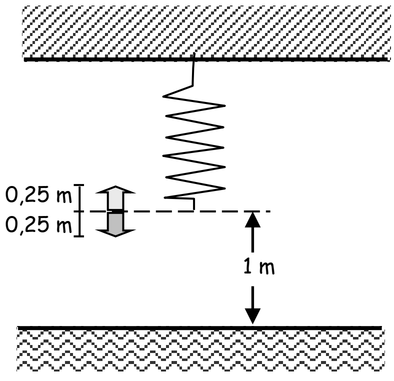
d) $\dfrac{x}{x-2} \geq 0$ e) $\dfrac{4-3x}{x-2} \leq 0$ f) $\dfrac{1-x}{-x} \geq 0$

g) $\dfrac{4-3x}{x-2} \geq -1$ h) $\dfrac{4-3x}{x^3} \geq 0$ i) $\dfrac{5}{3x} < 4$

VI) El valor absoluto de un número real en las inecuaciones

Problema propuesto

Un resorte sujeto a un techo está oscilando hacia arriba y hacia abajo de modo que su distancia **d**, con respecto al Piso satisface la desigualdad $|\,d-1\,| < \frac{1}{4}$ en metros. ¿Entre qué distancias, medidas respecto al piso, oscilará el resorte?



Es evidente que observando el dibujo, podemos obtener la respuesta y concluir con que el resorte oscilará entre 0,75 m y 1,25 m. Pero, ¿cómo resolver analíticamente la inecuación $\mid d-1 \mid < \frac{1}{4}$?

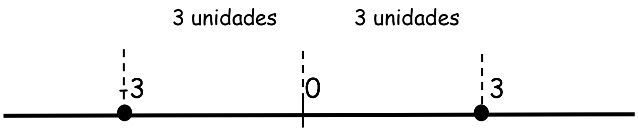
Repasemos la definición de valor absoluto de un número real estudiada en años anteriores:

Recuerda

<u>Definición:</u> $$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

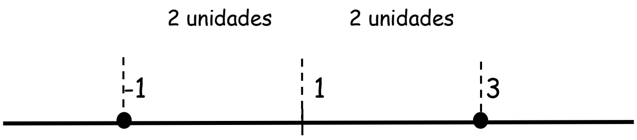
Hemos visto que una de las mejores formas de pensar en el valor absoluto consiste en hacerlo como distancia, en particular, **|x|** es la distancia entre **x** y el **origen**.

<u>Por ej.</u>: $|x| = 3 \Leftrightarrow [\, x = 3 \vee x = -3 \,]$

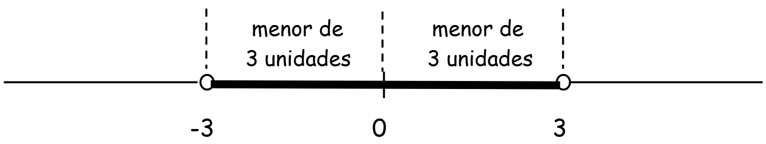


En forma semejante **|x - a|** es la distancia entre **x** y **a,**

<u>Por ej.</u>: $|x - 1| = 2 \Leftrightarrow [\, x - 1 = 2 \vee x - 1 = -2 \,] \Leftrightarrow [\, x = 3 \vee x = -1 \,]$

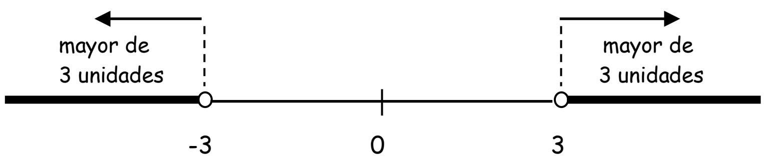


Consideremos ahora la desigualdad $|x| < 3$. Para resolverla necesitamos encontrar el conjunto de valores de x cuya distancia al origen es menor que 3 unidades. Observa la figura:



Luego, éstos son los valores de x que está entre (-3) y 3, es decir $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

Para resolver ahora la desigualdad $|x| > 3$ necesitamos encontrar el conjunto de valores de x cuya distancia al origen es mayor que 3 unidades. Observa la figura:



Luego, éstos son los valores de x que son menores que (-3) o mayores que 3, es decir

$|x| > 3 \Leftrightarrow [x < -3 \vee x > 3]$.

De la aplicación de la definición de valor absoluto y relaciones de orden resultan las siguientes propiedades:

Propiedades del valor absoluto de un número real

$P_1)$ $|x| = |-x|$

$P_2)$ $-|x| \leq x \leq |x|$

$P_3)$ $|x+y| \leq |x| + |y|$

$P_4)$ $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$

$P_5)$ $|x| < a , \forall\, a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a$

$P_6)$ $|x| > a , \forall\, a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > a \quad \vee \quad x < -a$

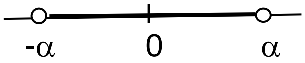
$P_7)$ $|x . y| = |x| . |y|$

$P_8)$ $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|} \quad \forall \quad y \neq 0$

Te proponemos que completes las demostraciones de P_5 y P_6 teniendo en cuenta que tienes todos los recursos para hacerlo:

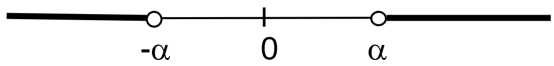
Demostración de P_5) $\boxed{|x| < \alpha \, , \forall \, \alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\alpha < x < \alpha}$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \ \text{Si } x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x < \alpha \\ \bullet \ \text{Si } x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow -x < \alpha \Rightarrow x \ \ldots\ldots \ (-\alpha) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \quad \ldots\ldots < x < \ldots\ldots\ldots$$



Demostración de P_6) $\boxed{|x| > \alpha \, , \forall \, \alpha > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \alpha \quad \vee \quad x < -\alpha}$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \ \text{Si } x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x > \alpha \\ \bullet \ \text{Si } x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow -x > \alpha \Rightarrow x \ \ldots\ldots \ (-\alpha) \end{array} \right\} \Leftrightarrow [\, x > \ldots\ldots\ldots \quad \vee \quad x < \ldots\ldots\ldots\,]$$



Ejercicios propuestos

17) Expresa cada uno de los siguientes enunciados utilizando el símbolo de valor absoluto.

a) x está a menos de 3 unidades de 7.
b) x difiere de 2 en menos de 3 unidades.
c) x no está a menos de 5 unidades de 7.
d) La distancia entre x y 7 es 4.
e) x+4 está a menos de 2 unidades de 0.
f) x está entre -3 y 3.
g) $x > 6 \ \vee \ x < -6$
h) $x-6 > 4 \ \vee \ x-6 < -4$
i) El número x de horas que una máquina funcionará de manera eficiente difiere de 105 en menos de 3.
j) El ingreso promedio mensual (en dólares) de una familia difiere de U$850 en menos de U$100.

18) Resuelve las siguientes inecuaciones e indica el conjunto solución.

a) $\left|\dfrac{1-2x}{-3}\right| < 6$ b) $|2x - 3| + 6 > 11$ c) $\left|\dfrac{2x-3}{8}\right| \leq \dfrac{1}{4}$ d) $\left|\dfrac{1}{3-x}\right| \geq 2$

e) $|1-x| - 3 < 2$ f) $|x| > |2x|$ g) $|y+4| < 3$ h) $3 - |1-2x| \geq -1$

i) $\left|5 - \dfrac{2}{x}\right| < 1$ j) $x^2 - 1 > 0$

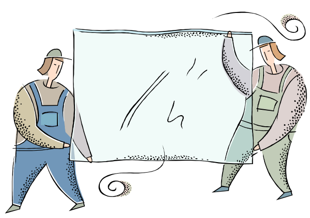
19) Resuelve analíticamente el problema propuesto en la página 14 y verifica el resultado obtenido anteriormente.

20) Las alturas h, en cm., de dos tercios de una población satisfacen la desigualdad:

$\left|\dfrac{h-172}{4,5}\right| \leq 1$, determina el intervalo de la recta real en que varían dichas alturas.

21) Para ver si una moneda es buena, se lanza 100 veces y se anota el número x de caras obtenidas . La estadística enseña que la moneda es declarada falsa o trucada si $\left|\dfrac{x-50}{5}\right| \geq 1,645$, ¿para qué valores de x ocurre tal cosa?

22) Idealmente ciertos tipos de vidrio fabricados por las industrias PPG tendrán un grosor de 0,089 pulgadas. Sin embargo debido a las limitaciones en el proceso de fabricación, se permite que el grosor varíe con respecto al grosor ideal hasta en 0,004 pulgadas.

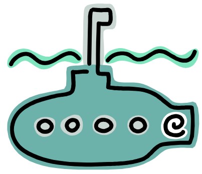


a) Si t representa el grosor real del vidrio, expresa mediante el uso de valor absoluto el rango de grosor permitido.

b) ¿Cuál es el grosor más pequeño permitido para el vidrio? ¿Y el mayor?

Fuente: w.w.w.ppg.com

23) Un submarino está 160 pies por debajo del nivel del mar, y tiene una formación rocosa por arriba y abajo de él por lo que no debe cambiar su profundidad en más de 28 pies.



a) Describe mediante el uso de valor absoluto el rango en que puede variar la profundidad **p** del subamarino.

b) ¿Entre qué distancias verticales medidas respecto al nivel del mar puede moverse el submarino?

24) Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones expresando su conjunto solución como intervalo.

a) $\begin{cases} |x+1| \leq 5 \\ 2(1-x) > 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x|+1 < 6 \\ |x| > 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} |3x-1| \leq 8 \\ x > 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ 2x - 1 > 3 \end{cases}$

<u>Problemas de repaso</u>

1) Determina si las siguientes proposiciones son V (verdaderas) o F (falsas). Justifica cada respuesta.

a) El número cero es solución de : $\sqrt{\dfrac{(2x+1)^3}{x+4}} + x(6x-5) < 3x-1$

b) Si un número es menor que 2, su opuesto es menor que (–2).
c) El producto de dos números menores que uno es también menor que uno
d) La suma de dos números mayores que (-2) es mayor que -2.
e) Si $-x < 3$, entonces $2x > -6$
f) En todo cuadrilátero abcd ,la diagonal bd es menor que su semiperímetro
g) Si x está en el intervalo (3;4) , entonces 2x está en el (6;8)
h) Si $\dfrac{3}{x-1} > 1$, entonces $3 > x-1$

2) Representa en el eje real el siguiente conjunto: $M = \left\{ y \,/\, \dfrac{|y|}{9} < \dfrac{1}{3} \;\wedge\; -y+1 \geq 3 \right\}$

3) Une cada inecuación con su conjunto solución:

a) $-x.(x-1)^2.(x+2) \geq 0$ 1) $\left(2;\frac{7}{3}\right)$

b) $|1-x|-3<2$ 2) $\left(-\infty;\frac{8}{7}\right] \cup [8;+\infty)$

c) $\frac{1}{x-2}>3$ 3) $[-2;0] \cup \{1\}$

d) $\left|\frac{4x-3.(x+4)}{5x-10}\right|>0$ 4) $(-3;4)$

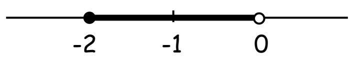
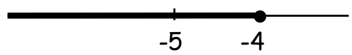
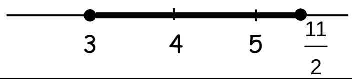
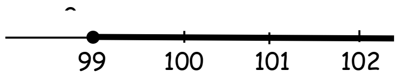
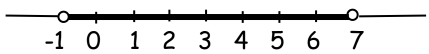
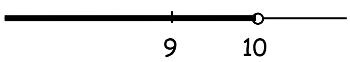
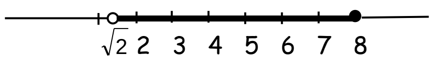
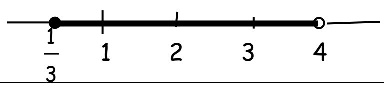
e) $\left|\frac{3x}{x-2}\right| \leq 4$ 5) $\Re-\{2;12\}$

f) $|x|-4<0 \quad \wedge \quad \frac{1}{x+3}>0$ 6) $(-4;\ 6)$

4) La suma de los ángulos interiores de un polígono supera a 990° y no alcanza a 1890°. Averigua el número de lados de los polígonos que cumplen con estas condiciones. (Recuerda que $S_n = 180°.(n-2)$, donde "n" es el número de lados del polígono).

<u>Respuestas:</u>

1)

Notación de intervalos	Notación de conjuntos	Representación gráfica
$[-2\ ;\ 0)$	$\{x\ /\ -2 \leq x < 0\}$	
$(-\infty\ ;\ -4\ ]$	$\{x\ /\ x \leq -4\}$	
$[3\ ;\ \frac{11}{2}]$	$\{x\ /\ 3 \leq x \leq \frac{11}{2}\}$	
$[99\ ;\ +\infty)$	$\{x\ /\ x \geq 99\}$	
$(-1\ ;\ 7\ )$	$\{x\ /\ -1 < x < 7\}$	
$(-\infty\ ;\ 10\ )$	$\{x\ /\ x < 10\}$	
$(\sqrt{2}\ ;\ 8\ ]$	$\{x\ /\ \sqrt{2} < x \leq 8\}$	
$[\frac{1}{3}\ ;\ 4)$	$\{x\ /\ \frac{1}{3} \leq x < 4\}$	

2) a) S = [12 ; +∞) b) S = (-∞ ; $-\frac{1}{2}$) c) S = (1 ; +∞) d) S = ($\frac{22}{17}$; +∞) e) S = (-∞ ; +∞)

f) S = (5 ; +∞) g) S = [2 ; +∞) h) S = (2 ; +∞) i) S = (2 ; +∞) j) S = (-∞ ; +∞)

k) S = (-∞ ; $-\frac{23}{11}$) l) S = (-∞ ; +∞) m) S = (-∞ ; $\frac{5}{3}$) n) S = [0 ; +∞)

<u>Nota:</u> Las representaciones gráficas quedan a cargo del alumno.

3) i) Correcta ii) Incorrecta iii) Correcta iv) Incorrecta
4) Se deben vender mensualmente más de 400 camisetas.
5) Debería vender por lo menos 61 libros.
6) La mínima calificación que debe obtener es de 98 puntos.
7) a) 12 cajas b) 10 cajas
8) La base mayor debe medir a lo sumo 20 cm.
9) Sup. ≤ 12,25 (expresada en cm^2)
10) a) $\Re^- \cup [0;\pi]$ b) (-1;0) c) (-1;0) d) [-1 ;0)
11) a) S= $\left(\frac{13}{3} ; \frac{43}{3}\right)$ b) S = ∅ c) S = (-3 ; 3) d) S = $\left(-\frac{5}{2};-2\right)$

e) S = (-∞ ; -2) f) S = (0 ; 1) g) S = ∅ h) S = ∅

12) El tercer lado debe medir más de 11cm y menos de 13 cm.
13) Debe costar más de \$5,38 y menos de \$5,83.
14) Los números son 638, 639 y 640.
15) Debe medir entre 1 y 5 cm.
16) a) S = (0;3) b) S = (-∞ ; $-\frac{2}{3}$] ∪ [1 ; +∞) c) S = [-4 ; 0]

d) S = (-∞ ; 0] ∪ (2; + ∞) e) S = (-∞ ; $\frac{4}{3}$] ∪ [2 ; +∞) f) S = (-∞ ; 0) ∪ [1; + ∞)

g) S = [1 ; 2) h) S = (0 ; $\frac{4}{3}$] ∪ [2 ; +∞) i) S = (-∞ ; 0) ∪ [$\frac{5}{12}$; + ∞)

17) a) $|x - 7| < 3$ b) $|x - 2| < 3$ c) $|x - 7| \leq 5$ d) $|x - 7| = 4$ e) $|x + 4| < 2$ f) $|x| < 3$
g) $|x| > 6$ h) $|x - 6| > 4$ i) $|x - 105| < 3$ j) $|x - 850| < 100$

18) a) S = ($-\frac{17}{2}$; $\frac{19}{2}$) b) S = (-∞ ; -1) ∪ (4; + ∞) c) S = [$\frac{1}{2}$; $\frac{5}{2}$] d) S = $\left[\frac{5}{2};3\right) \cup \left(3;\frac{7}{2}\right]$

e) S = (-4 ; 6) f) S = ∅ g) S = (-7 ; -1) h) S = [$-\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$]

i) S = ($\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$) j) S = (-∞ ; -1) ∪ (1; + ∞)

19) Oscilará entre 0,75 y 1,25 m.
20) [167,5 ; 176,5]
21) Para valores menores o iguales que 41 y mayores o iguales a 59.
22) a) $|t-0{,}089| \leq 0{,}004$
b) El menor grosor permitido es de 0,085 pulgadas y el mayor de 0,093 pulgadas.
23) a) $|p - 160| \leq 28$
b) Entre 132 y 188 pies inclusive.
24) a) S = [-6;-1) b) S = (-5;-2) ∪ (2;5) c) S = (2;3] d) S = ∅

<u>Bibliografía</u>

- ✓ Apunte "Inecuaciones" – IPS – Código 1277
  Departamento de Matemática.
- ✓ "Algebra Intermedia" – Séptima edición 2008
  Autor: Angel R. Allen
  Pearson – Prentice Hall

- ✓ "Cálculo - Una variable" – Undécima edición 2006
  Autor: George B. Thomas, Jr
  Pearson Educación

- ✓ "Cálculo – Volumen 1" – Quinta edición 1996
  Autores: Roland Larson – Robert Hostetler – Edwards Bruce
  Mc Graw Hill

- ✓ "Cálculo – Diferencial e integral" – Sexta edición
  Autores: Edwin Purcell – Dale Varberg
  Prentice Hall Hispanoamericana S.A.

- ✓ "Älgebra" – Segunda edición 2008
  Autoras: A. Engler – D. Müler – S. Vrancken – M. Hecklein
  Universidad Nacional del Litoral

- ✓ "Matemáticas para Administración y Economía" – Décima edición 2006
  Autores: Ernest Haeussler, Jr – Richard Paul
  Pearson Educación

- ✓ "Matemática I – Ciencias"– Edición 1999
  Autores: C.Álvarez - F.Álvarez - A.Arribas - S.Martinez – A.Ruiz
  Editorial Vinces Vives

- ✓ "Inecuaciones – Sistemas de inecuaciones" Práctica complementaria Tercer Año IPS
  Autora: Silvia Amicozzi