

Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Vectores

3º Año

Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGÓGICOS

Cód. 1302-17

Prof. Mónica Napolitano

Prof. M. Del Luján Martínez

Revisión Prof. Patricia Godino

Dpto. de Matemática





1- INTRODUCCIÓN

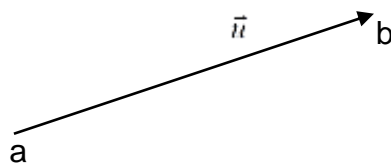
En diversas oportunidades nos hemos encontrado en temas relacionados con la Física, con magnitudes que quedan definidas mediante un número, las denominadas **magnitudes escalares**. Entre ellas, podemos citar la longitud, la masa, el volumen. Otras, en cambio, **las magnitudes vectoriales**, requieren además del número, para su definición, de elementos tales como dirección y sentido representados por segmentos orientados o flechas denominados **vectores**. Se cuenta entre estas últimas magnitudes, como ejemplo, las fuerzas, los desplazamientos, las velocidades, etc.

2- VECTOR

Definición. Sus elementos

Se llama vector a todo segmento orientado, es decir, a todo segmento determinado por un par ordenado $(a; b)$ de puntos. El punto **a** se llama origen y el punto **b** extremo del vector.

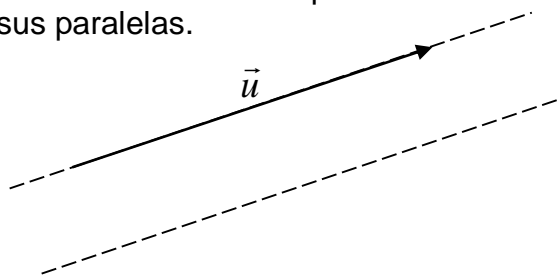
Para simbolizarlo usaremos \overrightarrow{ab} o simplemente \vec{u}



Los elementos de un vector son tres, a saber:

➤ Dirección

La *dirección* de un vector está dada por la dirección de la recta que lo contiene o cualquiera de sus paralelas.

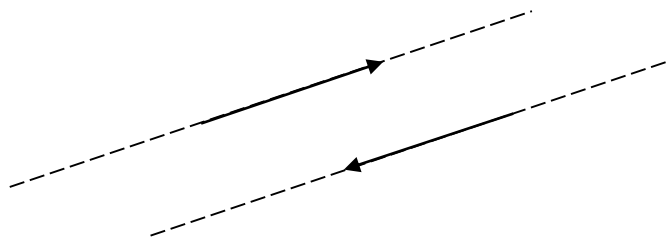


➤ Sentido

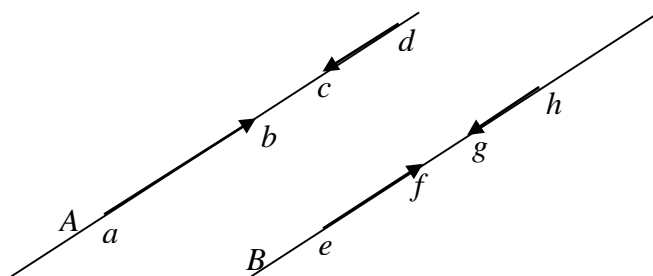
La orientación del vector sobre la recta, definida por su origen y su extremo, determina el *sentido* del mismo.

En cada dirección hay dos sentidos.

Gráficamente el sentido de un vector es indicado con una flecha.



Ejemplo:



$A // B$

En la figura, los vectores \vec{ab} y \vec{ef} tienen igual sentido y los vectores \vec{ab} y \vec{hg} tienen distinto sentido.

Observaciones:

El sentido se compara en forma gráfica, sólo si tienen igual dirección

➤ Módulo

El *módulo* es la medida del segmento orientado.

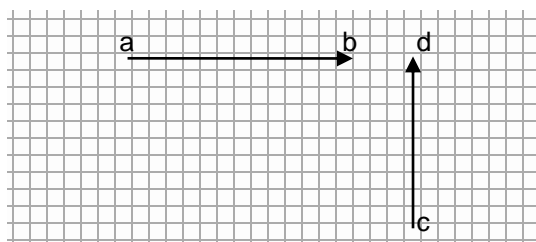
El módulo de un vector \vec{ab} se simboliza $|\vec{ab}|$

Por todo lo precedente, podemos decir que el *módulo de un vector* es siempre un número *no negativo*, o sea

$$|\vec{u}| \geq 0 \quad \forall \vec{u}$$

Observación: Diremos que dos vectores \vec{ab} y \vec{cd} poseen **igual módulo** si la medida de los segmentos ab y cd son iguales, respecto a la misma unidad de medida.

$$|\vec{ab}| = |\vec{cd}|$$





Vectores particulares

- **Vector libre**

Dado un segmento ab , se llama **vector libre** \vec{ab} al conjunto de todos los vectores que tienen igual módulo, dirección y sentido que \vec{ab} , incluido el propio \vec{ab} . En lo sucesivo será indistinto trabajar con cualquiera de los elementos de dicho conjunto.

- **Vector nulo**

Llamaremos **vector nulo** a todo punto y lo notaremos \vec{o}

En el vector nulo el origen y el extremo del mismo coinciden.

$$\vec{u} = \vec{o}$$

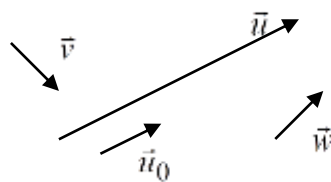
El vector nulo es el único que tiene módulo cero y que no tiene definido ni dirección ni sentido.

En símbolos:

$$\vec{u} = \vec{o} \Leftrightarrow |\vec{u}| = 0$$

- **Versor**

Se llama *versor* o *vector unitario* a cualquier vector de módulo uno.



$$|\vec{v}| = |\vec{w}| = |\vec{u}_0| = 1 \Leftrightarrow \vec{v}; \vec{w} \text{ y } \vec{u}_0 \text{ son versores}$$

- **Versor asociado a un vector**

Dado un vector $\vec{u} \neq \vec{0}$, se llama “versor asociado al vector \vec{u} ”, y se simboliza \vec{u}_0 , al versor que posee igual dirección y sentido que \vec{u}

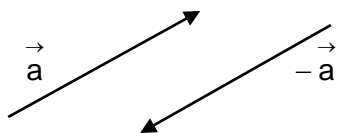
En el ejemplo anterior el versor \vec{w} por tener igual dirección y sentido que \vec{u} es un versor asociado a \vec{u} .

- **Vector opuesto a un vector**

Dado un vector cualquiera \vec{a} , se llama vector opuesto de \vec{a} y se simboliza $-\vec{a}$, al vector que tiene igual dirección, igual módulo y distinto sentido que \vec{a} , si \vec{a} no es nulo y si el vector $\vec{a} = \vec{0}$, $-\vec{a} = \vec{0}$

$$\text{Si } \vec{a} \neq \vec{0} \rightarrow \begin{cases} \text{dirección}(\vec{-a}) = \text{dirección}(\vec{a}) \\ \text{sent}(\vec{-a}) \neq \text{sent}(\vec{a}) \\ |\vec{-a}| = |\vec{a}| \end{cases}$$

$$\text{Si } \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow -\vec{a} = \vec{0}$$



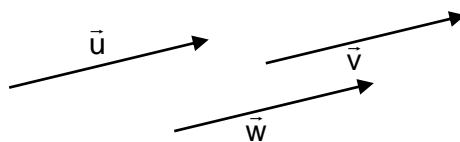
$$\bullet \vec{a} = -\vec{a} = \vec{0}$$

Vectores iguales

Dos vectores son iguales cuando son ambos nulos o tienen **igual módulo**, **dirección** y **sentido**. En símbolos:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \left[\vec{u} = \vec{v} = \vec{0} \vee \begin{cases} |\vec{u}| = |\vec{v}| \\ \text{direc. } \vec{u} = \text{direc. } \vec{v} \\ \text{sent. } \vec{u} = \text{sent. } \vec{v} \end{cases} \right]$$

Ejemplo:



$$\vec{u} = \vec{v} = \vec{w}$$

Definición:

Dos vectores no nulos **son paralelos** cuando poseen la misma dirección.

En símbolos:

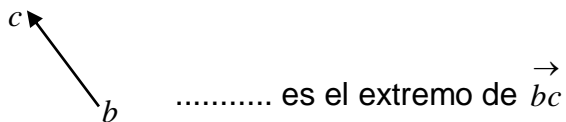
$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \text{dirección de } \vec{a} = \text{dirección de } \vec{b}$$



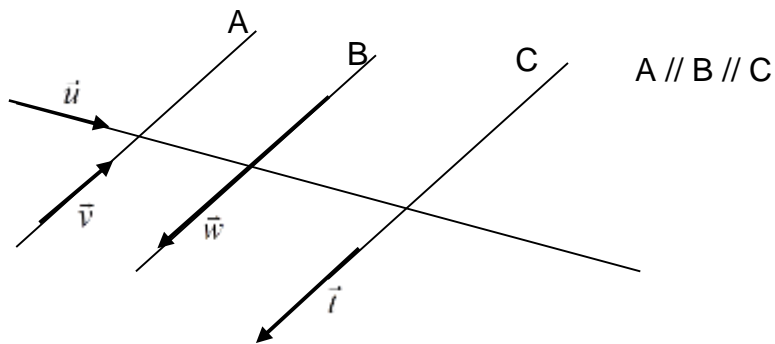
Actividades:

- 1) Dados los vectores de las figuras completa de modo que las siguientes expresiones resulten verdaderas

a)



b)



..... y tienen distinta dirección

..... y tienen igual dirección

..... y tienen distinto sentido

- 2) Dibuja los vectores \vec{a} ; \vec{b} ; \vec{c} ; y \vec{t} , sabiendo que

- La dirección de \vec{a} es una recta horizontal y su sentido hacia la derecha, con $|\vec{a}| = 3$
- La dirección de \vec{b} es una recta vertical y su sentido hacia abajo con $|\vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$
- \vec{b} y \vec{c} tienen igual dirección, igual módulo pero distinto sentido
- $\vec{t} = \vec{a}_0$

3) Dado \vec{a} dibuja

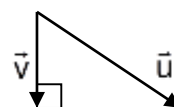
a) $\vec{v} / \vec{v} // \vec{a}$, $\text{sent. } \vec{v} \neq \text{sent. } \vec{a}$ y $|\vec{v}| = \frac{3}{2} |\vec{a}|$

b) $\vec{m} / \vec{m} \perp \vec{a} \wedge |\vec{m}| = |\vec{a}|$

4) Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F).
justifica la respuesta

a) $|\vec{u}| > |\vec{u}_0|$

b) En los vectores de la figura es $|\vec{u}| > |\vec{v}|$



c) $\vec{u} // \vec{v} \Rightarrow \vec{u}_0 = \vec{v}_0$

d) $|\vec{u}| > |\vec{v}| \Rightarrow |\vec{u}_0| > |\vec{v}_0|$

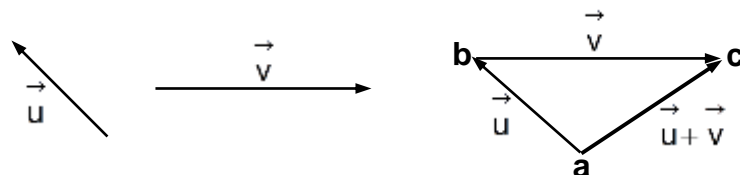
3- OPERACIONES ENTRE VECTORES

SUMA DE VECTORES.

Definición

Dados los vectores \vec{u} y \vec{v} , se denomina suma de vectores a un vector que se nota $\vec{u} + \vec{v}$ y se obtiene de la siguiente manera

Fijado arbitrariamente un punto **a**, queda determinado un punto **b** tal que $\vec{u} = \vec{ab}$ y a su vez queda determinado un punto **c** tal que $\vec{bc} = \vec{v}$. Se llama suma de \vec{u} y \vec{v} al vector \vec{ac} así obtenido.

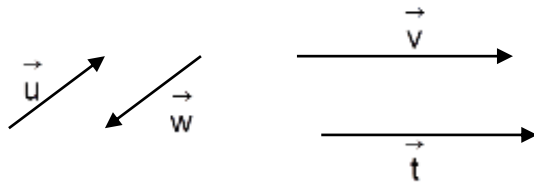




NOTA: se puede demostrar que la suma de vectores es independiente del punto a elegido y en consecuencia de los representantes \vec{ab} y \vec{bc} correspondientes.

Actividades:

5) Dados los vectores \vec{t} ; \vec{u} ; \vec{v} y \vec{w} de la figura



i) Determina gráficamente

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{t} + \vec{v}$

c) $\vec{u} + \vec{w}$

ii) Completa con la relación de orden que corresponda:

$|\vec{u} + \vec{v}| \dots \dots \dots |\vec{u}| + |\vec{v}|$

$|\vec{v} + \vec{t}| \dots \dots \dots |\vec{v}| + |\vec{t}|$

$|\vec{u} + \vec{w}| \dots \dots \dots |\vec{u}| + |\vec{w}|$

6) Prueba geoméricamente que:

$$\forall \vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ es } |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

7) Dibuja dos vectores \vec{u} y \vec{v} tales que:

a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{s} \quad \wedge \quad |\vec{s}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$

b) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{s} \quad \wedge \quad |\vec{s}| = 0$

¿Qué características tienen \vec{u} y \vec{v} en cada caso?

Propiedades de la suma de vectores

Dados \vec{a} ; \vec{b} y \vec{c} se puede probar la validez de las siguientes propiedades.

S₁) La suma de vectores es **asociativa**

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

S₂) La suma de vectores es **conmutativa**

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

S₃) Existencia del **elemento neutro**

$$\forall \vec{a} \text{ se tiene } \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

A $\vec{0}$ se lo denomina *elemento neutro* de la suma de vectores.

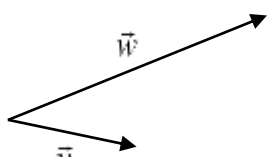
S₄) Existencia del **elemento opuesto**

$$\forall \vec{a} \exists -\vec{a} / \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

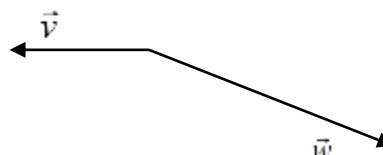
Actividades

8) Suma los vectores indicados en cada uno de los casos siguientes si $|\vec{v}| = 2$ y $|\vec{w}| = 4$

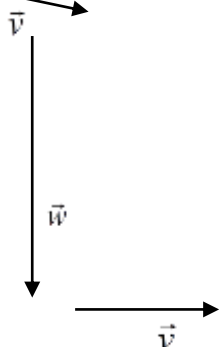
a)



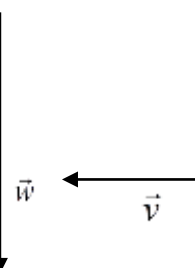
b)



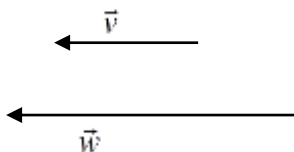
c)



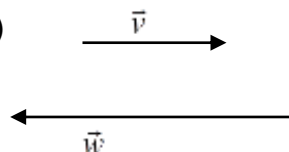
d)



e)

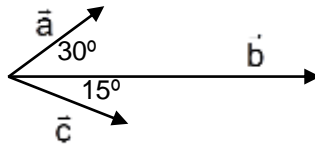


f)





9) Dados los vectores \vec{a} ; \vec{b} y \vec{c}



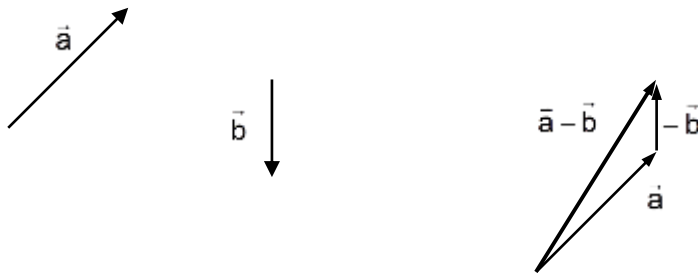
Dibuja:

a) \vec{d} / $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$

b) \vec{e} / $\vec{e} = -(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

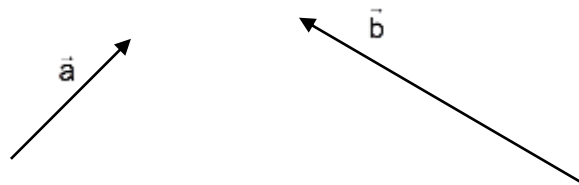
DIFERENCIA ENTRE DOS VECTORES

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \text{ es } \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



Actividades

10) Dados \vec{a} y \vec{b} de la figura



Construye:

a) $\vec{a} + \vec{b}$

b) $-\vec{a} + \vec{b}$

c) $\vec{a} - \vec{b}$

d) $\vec{b} - \vec{a}$

e) $-\vec{a} - \vec{b}$

¿Cómo son los vectores $\vec{a} - \vec{b}$ y $\vec{b} - \vec{a}$?

11) Verifica usando propiedades de la suma de vectores que:

$$\forall \vec{a}; \vec{c} \text{ es } \vec{a} + \vec{m} = \vec{c} \text{ con } \vec{m} = \vec{c} - \vec{a}$$

12) Verifica que si los vectores \vec{a} y \vec{b} con origen común determinan un paralelogramo, los vectores $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ están sobre las diagonales del paralelogramo

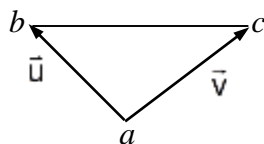
13) Expresa en cada caso los vectores indicados en función de \vec{u} y \vec{v}

a)

$$\vec{bc} =$$

$$\vec{cb} =$$

$$\vec{ca} =$$



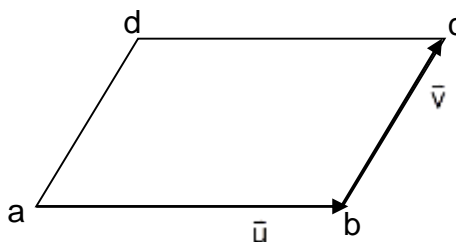
b) abcd es un paralelogramo

$$\vec{cd} =$$

$$\vec{da} =$$

$$\vec{db} =$$

$$\vec{ac} =$$



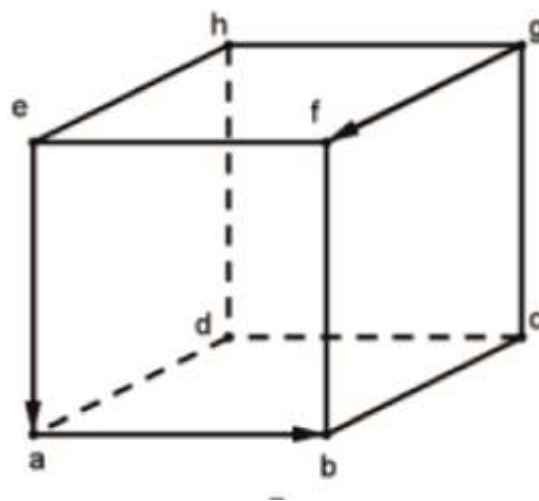
14) En la figura tenemos un cubo. Nombra:

a) tres vectores iguales que \vec{ab} . Justifica

b) tres vectores iguales a \vec{dh}

c) dos vectores iguales que $-\vec{gf}$

d) dos vectores con igual módulo que \vec{eh} pero distinta dirección

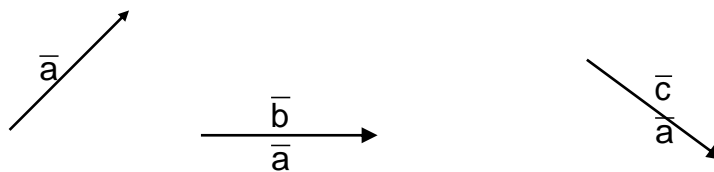




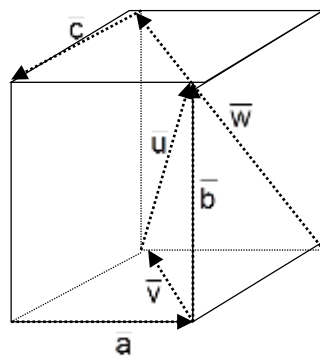
15) Analiza si la siguiente proposición es verdadera. Justifica.

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{a}| = 2 \\ |\vec{b}| = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 5$$

16) Dados \vec{a} ; \vec{b} y \vec{c} determina \vec{x} gráficamente de modo que $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{x} + \vec{c} = \vec{0}$



17) Dados \vec{a} ; \vec{b} y \vec{c} del gráfico expresa \vec{u} ; \vec{v} y \vec{w} en función de \vec{a} ; \vec{b} y \vec{c} .



$\vec{u} =$

$\vec{v} =$

$\vec{w} =$

18) Un nadador quiere atravesar un río nadando a una velocidad $\vec{v}_1 = 6 \frac{km}{h}$ en dirección perpendicular a la orilla; pero la corriente lo desplaza con una velocidad $\vec{v}_2 = 4 \frac{km}{h}$. Dibuja los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 (con una escala conveniente) y encuentra el vector $\vec{v} / \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Este vector representa la velocidad de desplazamiento del nadador. La dirección de \vec{v} es la dirección real en que se mueve el nadador. Calcula $|\vec{v}|$ observando que quedó determinado un triángulo rectángulo.

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN NÚMERO REAL

Definición

Llamamos producto de un \vec{u} por un número real α , o producto de un número α por un vector \vec{u} , a un vector \vec{v} tal que:

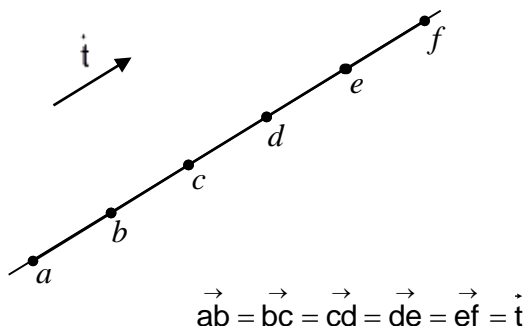
- Si $\alpha \neq 0 \wedge \vec{u} \neq \vec{0}$

$$\vec{v} = \alpha \cdot \vec{u} = \begin{cases} |\vec{v}| = |\alpha| \cdot |\vec{u}| \\ \text{dirección } \vec{v} = \text{dirección } \vec{u} \\ \text{sentido de } \vec{v} = \text{sentido de } \vec{u} \text{ si } \alpha > 0 \\ \text{sentido de } \vec{v} \neq \text{sentido de } \vec{u} \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

- Si $\alpha = 0 \vee \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Ejemplos:

1)



$$\vec{bd} = 2\vec{t}$$

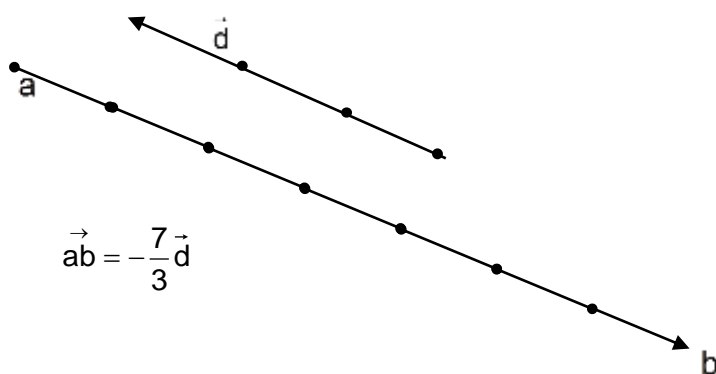
$$\vec{ec} = (-2)\vec{t}$$

$$\vec{cf} = 3\vec{t}$$

$$\vec{af} = 5\vec{t}$$

$$\vec{fe} = (-1)\vec{t}$$

2)





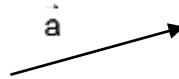
Actividad

19) Dibuja los vectores \vec{t} ; \vec{l} y \vec{m} tales que

a) $\vec{t} = 0,5 \vec{a}$

b) $\vec{l} = \frac{5}{3} \vec{a}$

c) $\vec{m} = -3 \vec{a}$



20) Sabiendo que \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} tienen las direcciones y sentidos indicados en las aristas de la pirámide de la figura, y además

$\vec{v} = \frac{1}{2} \vec{cb}$, $\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{ab}$ y $\vec{w} = \frac{1}{3} \vec{eb}$, expresa en función de

\vec{u} , \vec{v} y \vec{w} o sus opuestos los siguientes vectores:

• $\vec{ab} =$

• $\vec{bc} =$

• $\vec{be} =$

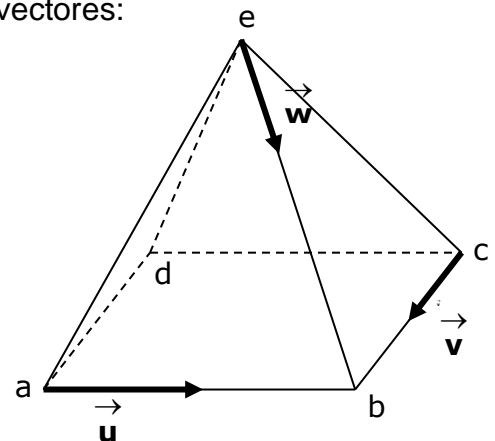
• $\vec{db} =$

• $\vec{ea} =$

• $\vec{ac} =$

• $\vec{ed} =$

• $\vec{ce} =$



Propiedades del producto de un vector por un número

Para cualquier par de vectores \vec{u} y \vec{v} y los números reales α y β se pueden demostrar las siguientes propiedades:

P₁) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

P₂) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

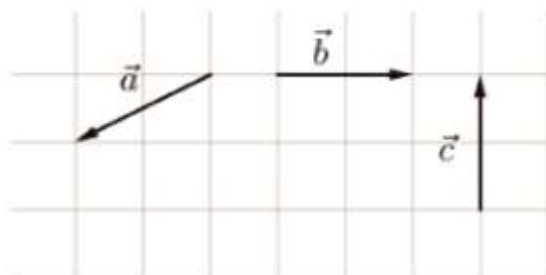
P₃) $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$

P₄) $1\vec{v} = \vec{v}$

Actividades

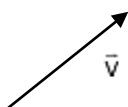
21) ¿Por qué $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$?

22) Dados \vec{a} ; \vec{b} y \vec{c}



Representa gráficamente \vec{w} siendo: $\vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \vec{c}$

23) Siendo



a) dibuja $\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ y $-\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$

b) demuestra que $\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ es el versor asociado (\vec{v}_0) de \vec{v}

VECTORES PARALELOS

Propiedad de los vectores paralelos: Condición de paralelismo entre vectores

Dos vectores \vec{u} y \vec{v} no nulos, son paralelos si y sólo si existe un número real $\lambda \neq 0$ tal que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$

En símbolos:

$$\text{Si } \vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} ; \vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} / \vec{v} = \lambda \vec{u}$$

Notemos que si: $\vec{v} = \lambda \vec{u}$, entonces

$$|\vec{v}| = |\lambda| |\vec{u}|$$



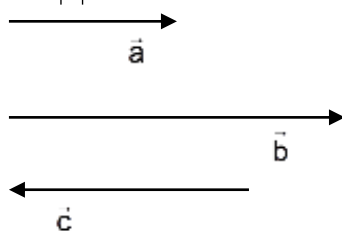
de donde

$$|\lambda| = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$$

como $|\vec{v}|$ y $|\vec{u}|$ son números reales y $|\vec{u}| \neq 0$ siempre existe el cociente $\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ que nos da el valor absoluto del número λ buscado, en cuanto si es positivo o negativo dependerá que \vec{u} y \vec{v} tengan igual o distinto sentido.

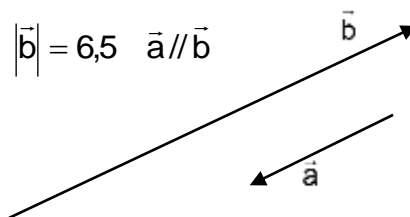
Actividades

- 24) \vec{a} ; \vec{b} y \vec{c} son los vectores paralelos cuyos sentidos están indicados en la figura con $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 4$ y $|\vec{c}| = 3$



- calcula λ y μ tal que $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ y $\vec{b} = \mu \vec{c}$
- determina $|\vec{t}|$ si $\vec{t} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

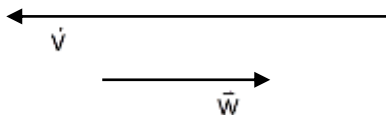
- 25) En la figura $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 6,5$ $\vec{a} // \vec{b}$



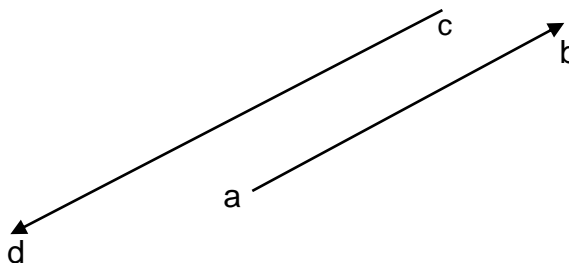
Construye el vector \vec{v} tal que $\vec{v} = \vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$

- 26) Calcula el valor de k si $|k\vec{v}| = 5\sqrt{2}$ y $|\vec{v}| = 2\sqrt{2}$

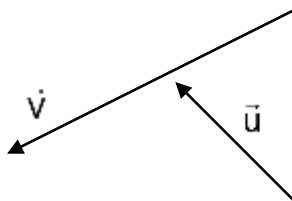
- 27) Reproduce la siguiente figura y averigua cuánto vale el número x tal que $\vec{v} = x \vec{w}$



- 28) Sea la figura siguiente con $|\vec{ab}| = 6$ y $|\vec{cd}| = 7.2$ con respecto al centímetro, construye el vector \vec{v} tal que $\vec{v} = -\frac{1}{3} \vec{cd} - \frac{2}{3} \vec{ab}$



- 29) Se dan los vectores \vec{u} y \vec{v} de la figura, determina el valor de x tal que $\vec{v} = x \vec{u}$



- 30) Se da un vector \vec{i} . Dibuja los vectores: $5\vec{i}$; $-\frac{5}{2}\vec{i}$; $\frac{1}{2}\vec{i}$, construye la suma \vec{v} de dichos vectores y determina x tal que $\vec{v} = x \vec{i}$

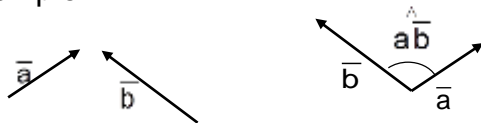


ANGULO ENTRE VECTORES

Definición:

Dados los vectores \vec{a} y \vec{b} no nulos se denomina **ángulo entre los vectores \vec{a} y \vec{b}** y se indica $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$ al ángulo convexo entre $[0; 2\pi)$ (es decir $0 \leq \widehat{\vec{a}\vec{b}} \leq \pi$) por ellos determinado al ser aplicados con origen en el mismo punto.

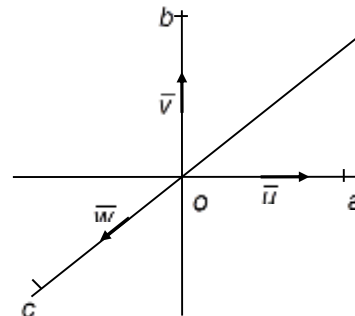
Ejemplo:



Actividades

31) Si $\vec{oa} \perp \vec{ob}$ y \vec{oc} bisectriz de \widehat{aob} ¿cuál es la medida de cada uno de los siguientes ángulos?

- a) $\widehat{\vec{u}\vec{v}}$
- b) $\widehat{\vec{w}\vec{v}}$
- c) $\widehat{\vec{u}(-\vec{u})}$
- d) $\widehat{\vec{u}\vec{u}}$
- e) $\widehat{\vec{u}(-\vec{w})}$
- f) $\widehat{(2\vec{u})(-3\vec{v})}$



PRODUCTO ESCALAR O INTERNO ENTRE VECTORES

Definición:

Dados dos vectores \vec{a} y \vec{b} , se llama **producto escalar o interno entre los vectores \vec{a} y \vec{b}** , y se simboliza $\vec{a} \times \vec{b}$, al número:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{cases} 0 & \text{si } \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \\ |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\vec{b}} & \text{si } \vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Propiedades

$\forall \vec{a}; \vec{b}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades:

PE₁) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$

Demostración:

$$\vec{a} \times \vec{b} \stackrel{(1)}{=} |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \hat{\vec{a}\vec{b}} \stackrel{(2)}{=} |\vec{b}| |\vec{a}| \cos \hat{\vec{b}\vec{a}} \stackrel{(1)}{=} \vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \hat{\vec{a}\vec{b}}$$

- (1) Definición de Producto Escalar
- (2) Propiedad conmutativa de la multiplicación
- (3) $\cos 0 = 1$
- (4) Definición de potenciación

PE₂) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

PE₃) $(\alpha \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{a} \times (\alpha \vec{b})$

PE₄) $\vec{a} \times \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$

Demostración:

$$\vec{a} \times \vec{a} \stackrel{(1)}{=} |\vec{a}| |\vec{a}| \cos \hat{\vec{a}\vec{a}} \stackrel{(3)}{=} |\vec{a}| |\vec{a}| \stackrel{(4)}{=} |\vec{a}|^2$$

PE₅) si $\vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \neq \vec{0} : \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ (condición de perpendicularidad entre vectores no nulos)

Demostración:

$$\Rightarrow) \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \hat{\vec{a}\vec{b}} = 0 \Rightarrow \cos \hat{\vec{a}\vec{b}} = 0 \Rightarrow \hat{\vec{a}\vec{b}} = 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow) \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \hat{\vec{a}\vec{b}} = 90^\circ \Rightarrow \cos \hat{\vec{a}\vec{b}} = 0 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

Actividades

32) Siendo $|\vec{a}| = 2$, determina:

- a) $\vec{a} \times \vec{a}$
- b) $(2\vec{a}) \times \vec{a}$
- c) $\vec{a} \times (-\vec{a})$

33) Sabiendo que $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 4$ y $\hat{\vec{a}\vec{b}} = 30^\circ$, calcula:

- a) $\vec{b} \times \vec{a}_0$
- b) $(3\vec{b}) \times (-2\vec{a})$
- c) $\left(-\frac{1}{2}\right) \vec{a} \times \vec{b}_0$



34) Sabiendo que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 6$, determina $\vec{u} \times \vec{v}$ si:

- a) $\vec{u} // \vec{v}$ y tienen igual sentido
- b) $\vec{u} // \vec{v}$ y tienen distinto sentido.
- c) $\vec{u} \perp \vec{v}$
- d) $\widehat{\vec{u} \vec{v}} = 150^\circ$

35) Determina:

- a) el ángulo que forman \vec{a} y \vec{b} , sabiendo que $\vec{a} \times \vec{b} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$; $|\vec{a}| = \sqrt{5}$ y $|\vec{b}| = 4$.
- b) El módulo del vector \vec{v} , sabiendo que $\vec{u} \times \vec{v} = -20$, $|\vec{u}| = 10$ y $\widehat{\vec{u} \vec{v}} = 120^\circ$

4 - SISTEMA DE REFERENCIA CARTESIANO ORTONORMAL

- En el espacio

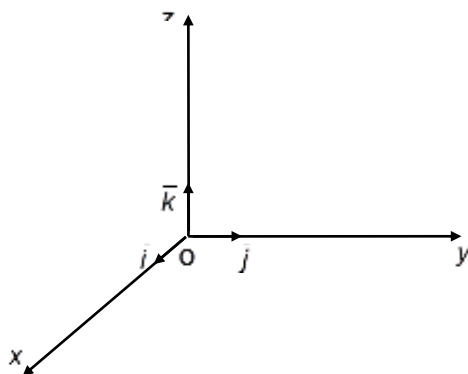
Definición:

Dado un punto cualquiera del espacio o (origen de coordenadas), y en él aplicados tres versores \vec{i} ; \vec{j} y \vec{k} perpendiculares dos a dos, al conjunto $\{o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ se lo denomina **sistema de referencia ortonormal en el espacio**.

Denominaremos como:

- **ejes coordenados “x”; “y” y “z”** a cada una de las rectas que contienen a cada uno de los versores \vec{i} ; \vec{j} y \vec{k} , respectivamente.
- **planos coordenados xy; xz e yz**, a los planos que determinan los ejes x e y , los ejes x y z , y los ejes y y z , respectivamente.

Gráficamente resulta:



$$\left. \begin{array}{l} \text{punto fijo } o \\ |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1 \\ \vec{i} \perp \vec{j} \\ \vec{j} \perp \vec{k} \\ \vec{k} \perp \vec{i} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \{o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\} \text{ sistema de referencia ortonormal en el espacio}$$

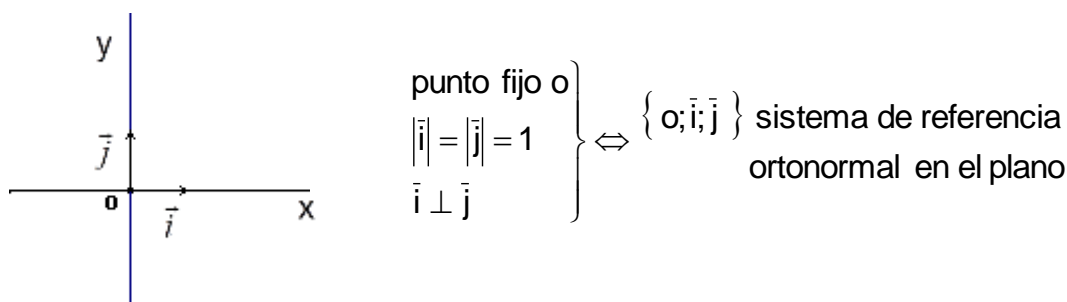
- En el plano

Definición:

Dado un punto cualquiera del plano o (origen de coordenadas), y en él aplicados dos versores \vec{i} y \vec{j} perpendiculares, al conjunto $\{o; \vec{i}; \vec{j}\}$ se lo denomina **sistema de referencia ortonormal en el plano**.

- **ejes coordenados “x”e “y”** a cada una de las rectas que contienen a cada uno de los versores \vec{i} y \vec{j} respectivamente.
- Se denominan al eje x, **eje de las abscisas** y al eje y, **eje de las ordenadas**

Gráficamente resulta:



Actividades

- 1) En un sistema de referencia $\{o; \vec{i}; \vec{j}\}$ ubica los puntos $a(-1; 3)$; $b(2; -3)$; $c(0; 3)$ y $a(-4; 0)$
- 2) En un sistema de referencia $\{o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ ubica los puntos: $a(2; 1; 3)$; $b(0; 2; 1)$; $c(-1; 0; 0)$ y $d(4; 0; 3)$.
- 3) Completa de modo que resulten verdaderas las siguientes proposiciones
 - a. $p(x; \dots) \in$ eje de las abscisas con $x \in \mathbb{R}$
 - b. $p(0; y) \in$ eje con $y \in \mathbb{R}$
 - c. $p(0; 0; z) \in$ eje con $z \in \mathbb{R}$
 - d. $p(4; 3; 0) \in$ plano



4) Representa en distintos sistemas de referencia los siguientes subconjuntos de puntos

a) $A = \{(x;y) / x = -2 \wedge -1 \leq y \leq 3\}$

e) $E = \{(x;y) / x \in \mathbb{Z}; y \in \mathbb{Z}; x \cdot y = 12\}$

b) $B = \{(x;y) / x \geq -1 \wedge y < 3\}$

f) $F = \{x / x = 0\}$

c) $C = \{(x;y) / |x| < 2 \wedge |y| = 1\}$

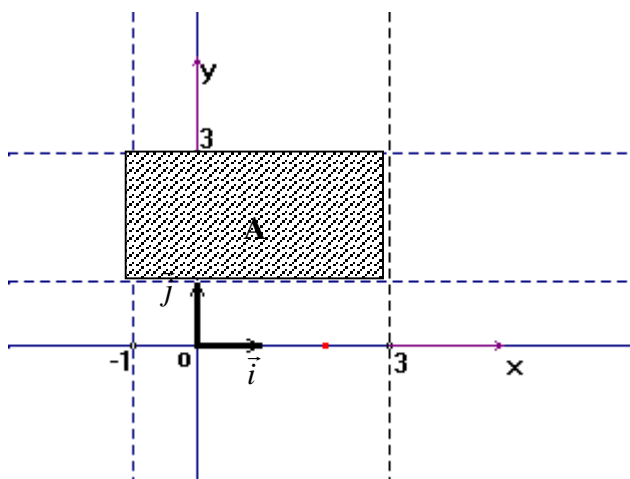
g) $G = \{(x;y) / x = 0\}$

d) $D = \{(x;y) / x > -\frac{2}{3} \vee y < \sqrt{2}\}$

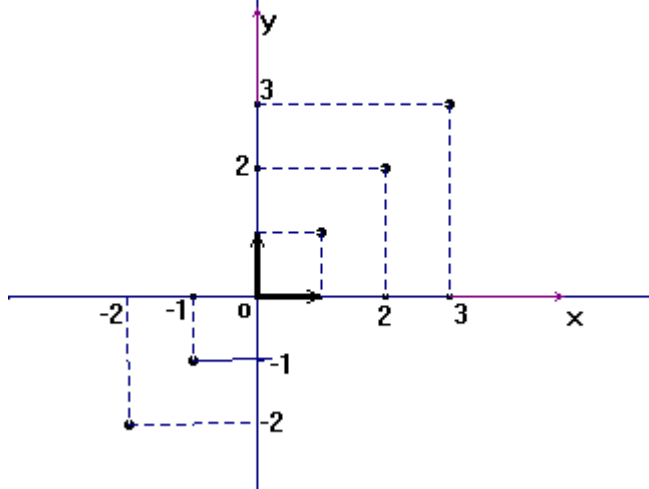
h) $H = \{(x;y;z) / x = 0\}$

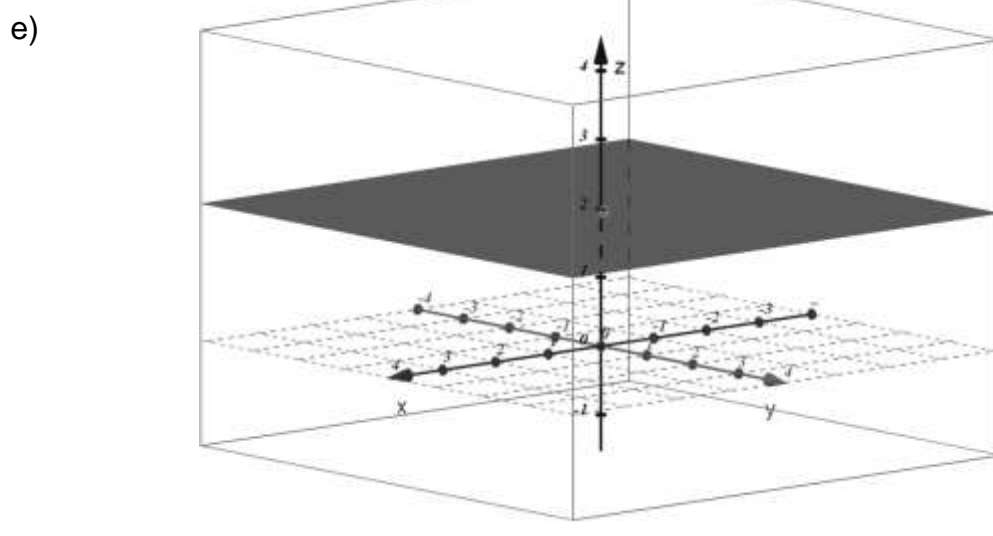
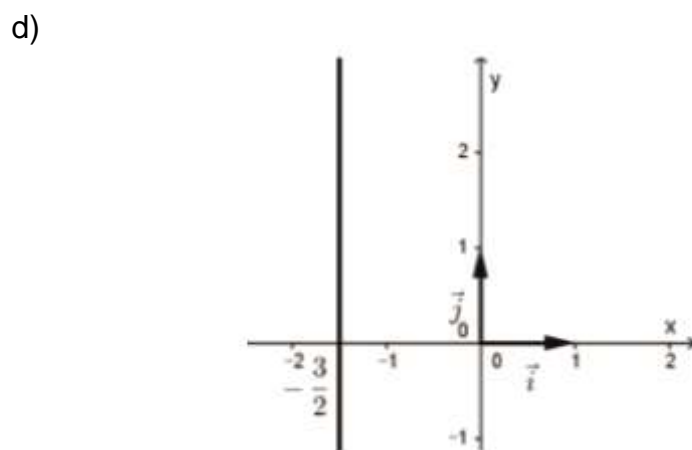
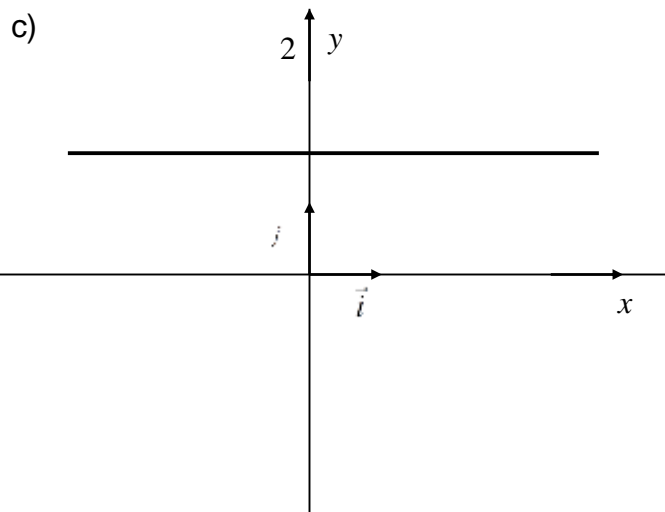
5) Escribe el conjunto de puntos que se indica en cada caso

a)



b)







AUTOEVALUACIÓN

1) Determina si las siguientes proposiciones son V (verdaderas) o F (falsas). Justifica tus respuestas

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \vec{u} \text{ paralelo a } \vec{v} \\ |\vec{u}| = |\vec{v}| \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$$

b) Si $|\alpha \vec{u}| = 4\sqrt{2}$ \wedge $|\vec{u}| = 2\sqrt{2}$ entonces $\alpha = 2$

c) En el rectángulo $abcd$ la base es el doble de su altura, entonces:

i) $\vec{ab} = \vec{cd}$

ii) $\vec{bc} = -\vec{da}$

iii) $\left| \vec{cd} \right| = \frac{1}{2} \left| \vec{bc} \right|$

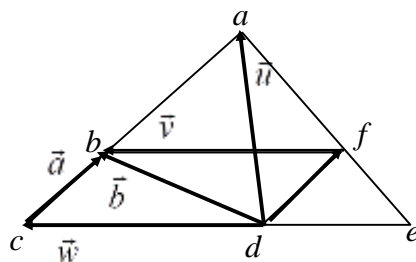
iv) $\vec{bc} = 2\vec{ab}$

v) $\vec{ad} = \vec{ab} + \vec{cd}$



- d) Todo vector tiene módulo distinto de cero.
- e) Si dos vectores tienen igual dirección y módulo, son opuestos.
- f) Si dos vectores son opuestos tienen igual dirección y módulo.
- g) Dos vectores que tienen distinto sentido pueden tener distinta dirección.
- h) Dos vectores iguales son paralelos.
- i) El versor asociado a un vector es paralelo a ese vector.
- j) Todos los versores son iguales.
- k) Si \vec{a} y \vec{b} tienen igual módulo, son iguales u opuestos.

3) Expresa \vec{u} ; \vec{v} y \vec{w} en función de \vec{a} y \vec{b} y/o de sus opuestos.



Bibliografía

- Apunte Cod 1302.15 ALGEBRA VECTORIAL – Autores varios
- Apunte Cod 1403-15 VECTORES – Cattáneo, B.; Lagreca, N.